

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ПРОЧНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ**

Методические указания к выполнению курсовой работы
для обучающихся заочной формы обучения
по дисциплине «Сопротивление материалов»

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2022

В курсовой работе по сопротивлению материалов «Прочностные расчеты элементов конструкций при различных видах нагружения» выполняются разделы:

- расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии;
- расчет на прочность и жесткость при кручении;
- расчет на прочность и жесткость при изгибе.

По каждому разделу выполняются указанные ниже задания.

Раздел I. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии.

Для статически определимого бруса

- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;
- построить эпюры нормальных напряжений и линейных перемещений поперечных сечений.

Жестко защементировать правый конец бруса, для полученной статически неопределимой системы

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- построить эпюры нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

Раздел II. Расчет на прочность и жесткость при кручении.

Для статически определимого бруса

- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;
- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.

Жестко защементировать правый конец бруса, для полученной статически неопределимой системы

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

Раздел III. Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

Для статически определимой балки

- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- подобрать поперечные сечения заданной формы, исходя из условий прочности;

для балки прямоугольного сечения с заданным отношением сторон h/b

- построить графики нормальных и касательных напряжений в опасном сечении;
- определить перемещение сечения С.

Добавить подвижную шарнирную опору в сечении С, для полученной статически неопределимой системы (балка прямоугольного сечения)

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- построить приближенный вид упругой линии статически неопределимой балки;
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

ВЫБОР ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Исходные данные приведены в таблице 1. В таблице 2 приведены расчетные схемы конструкций.

Для выбора исходных данных необходимо под тремя последними цифрами номера зачетной книжки подписать буквы А, В, С. Например,

№ 0 2 5 3 2 4
А В С

Из каждого вертикального столбца таблицы 1, обозначенного внизу буквой, взять число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы.

СОДЕРЖАНИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Графическая часть должна содержать:

Листы I, 2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении - сжатии и кручении.

- расчетные схемы статически определимых и статически неопределимых брусьев; эквивалентные системы (для статически неопределимых брусьев); эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений (для брусьев, работающих на растяжение-сжатие); эпюры крутящих моментов, наибольших касательных напряжений и угловых перемещений (для брусьев, работающих на кручение).

Лист 3. Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

- расчетные схемы статически определимой и статически неопределимой балок; эквивалентную систему (для статически неопределимой балки); эпюры поперечных сил и изгибающих моментов; схемы балок, нагруженных единичными силовыми факторами, приложенными в сечении С, и эпюры изгибающих моментов от их действия; графики нормальных и касательных напряжений в опасном сечении (для статически определимой балки); приближенный вид упругой линии (для статически неопределимой балки).

Графическая часть выполняется на трех листах А3 или на 6 листах А4.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 1

№	Схе- ма	$l=10a$ (м)	a_1	a_2	a_3	a_4	q (кН/м)	P_1	P_2	m_1	m_2	h/b	d/D	Материал		
														Брус I	Брус II	Брус III
1	1	0,4	2a	3a	5a	3a	5	1,0qa	1,5qa	5,0qa ²	5,5qa ²	1,0	0,4	ПСМД	ЛО 90-1	Ст.20
2	2	0,5	3a	4a	2a	4a	10	2,0qa	2,5qa	6,0qa ²	6,5qa ²	1,5	0,5	сополимеры полиамида	ЛО 70-1	Ст.30
3	3	0,6	2a	5a	5a	2a	15	3,0qa	3,5qa	7,0qa ²	7,5qa ²	2,0	0,6	капролон В	ЛС 74-3	Ст.40
4	4	0,8	4a	2a	4a	3a	20	4,0qa	4,5qa	8,0qa ²	8,5qa ²	2,5	0,7	капрон	ЛС 63-3	Ст.50
5	5	1,0	3a	3a	2a	5a	5	5,0qa	5,5qa	9,0qa ²	9,5qa ²	3,0	0,8	У5-301-41	ЛС 60-1	Ст.60
6	6	0,4	2a	4a	3a	2a	10	1,0qa	1,5qa	5,0qa ²	5,5qa ²	1,0	0,4	ПСМД	АМг 3	ВТ 5
7	7	0,5	3a	5a	3a	3a	15	2,0qa	2,5qa	6,0qa ²	6,5qa ²	1,5	0,5	сополимеры полиамида	АМг 5	ВТ 6
8	8	0,6	2a	2a	3a	4a	20	3,0qa	3,5qa	7,0qa ²	7,5qa ²	2,0	0,6	капролон В	АМг 6	ВТ 14
9	9	0,8	4a	3a	4a	2a	5	4,0qa	4,5qa	8,0qa ²	8,5qa ²	2,5	0,7	капрон	АД 31	ВТ 20
0	0	1,0	3a	2a	2a	2a	10	5,0qa	5,5qa	9,0qa ²	9,5qa ²	3,0	0,8	У5-301-41	АД 33	ВТ 21
	С	В	С	С	В	В	С	С	А	В	А	В	А	А	В	А

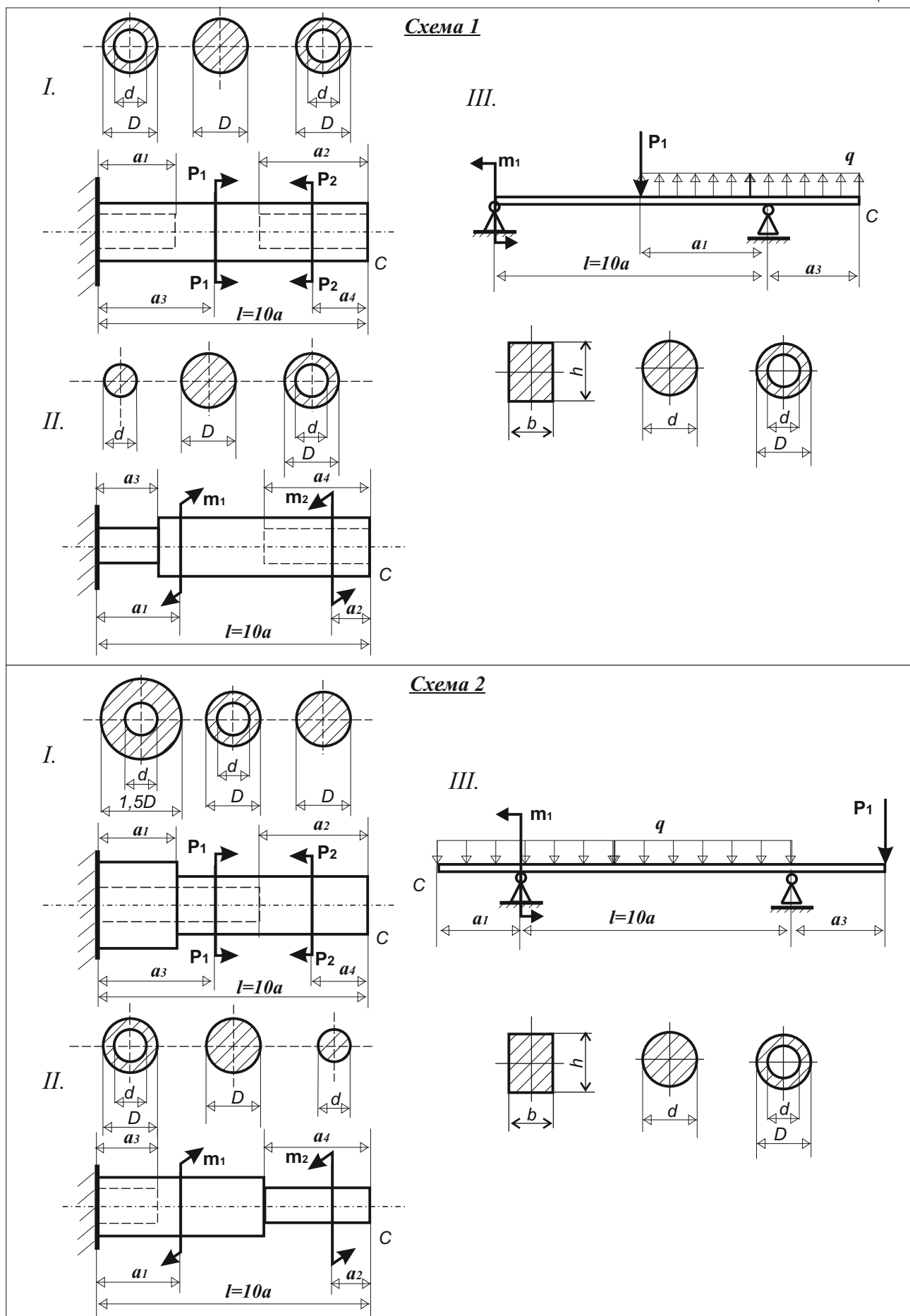


Схема 3

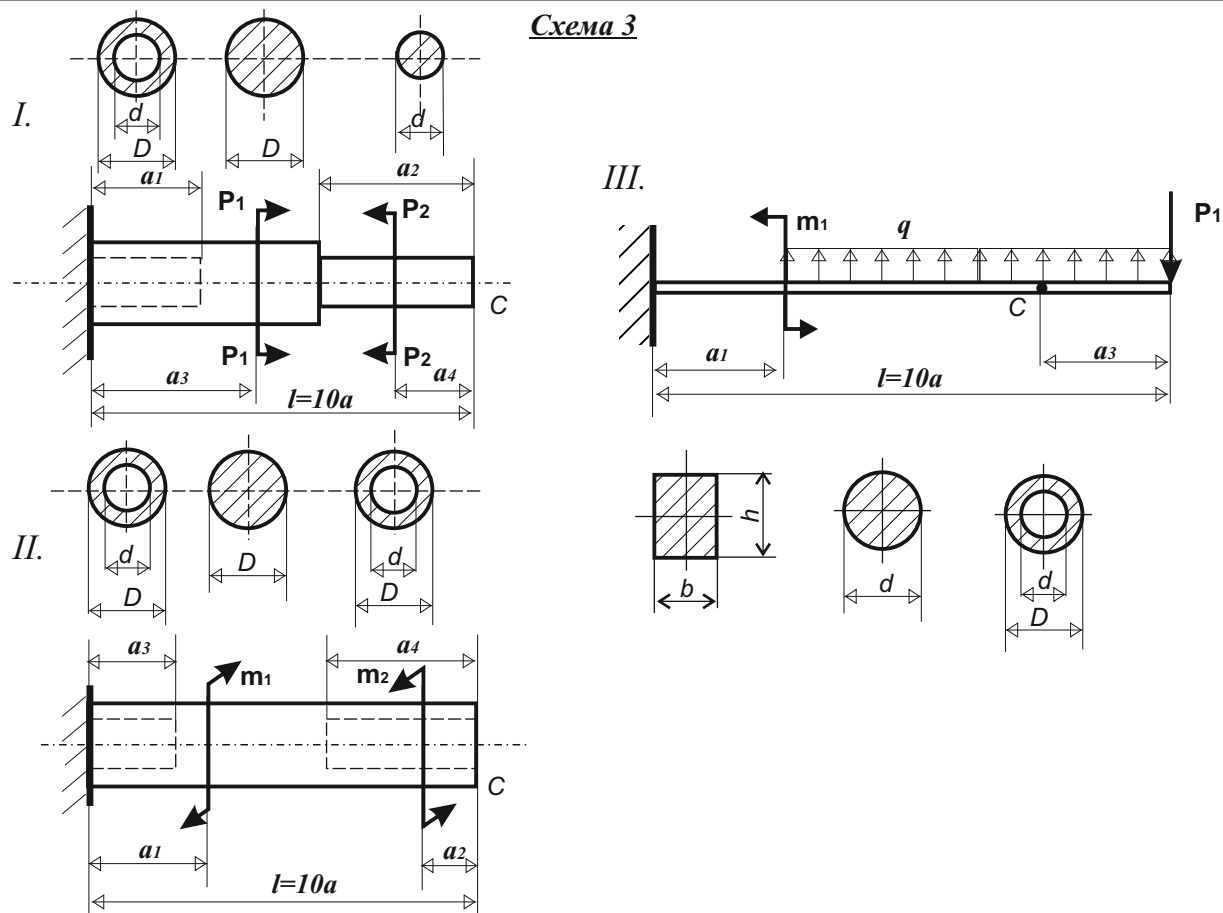
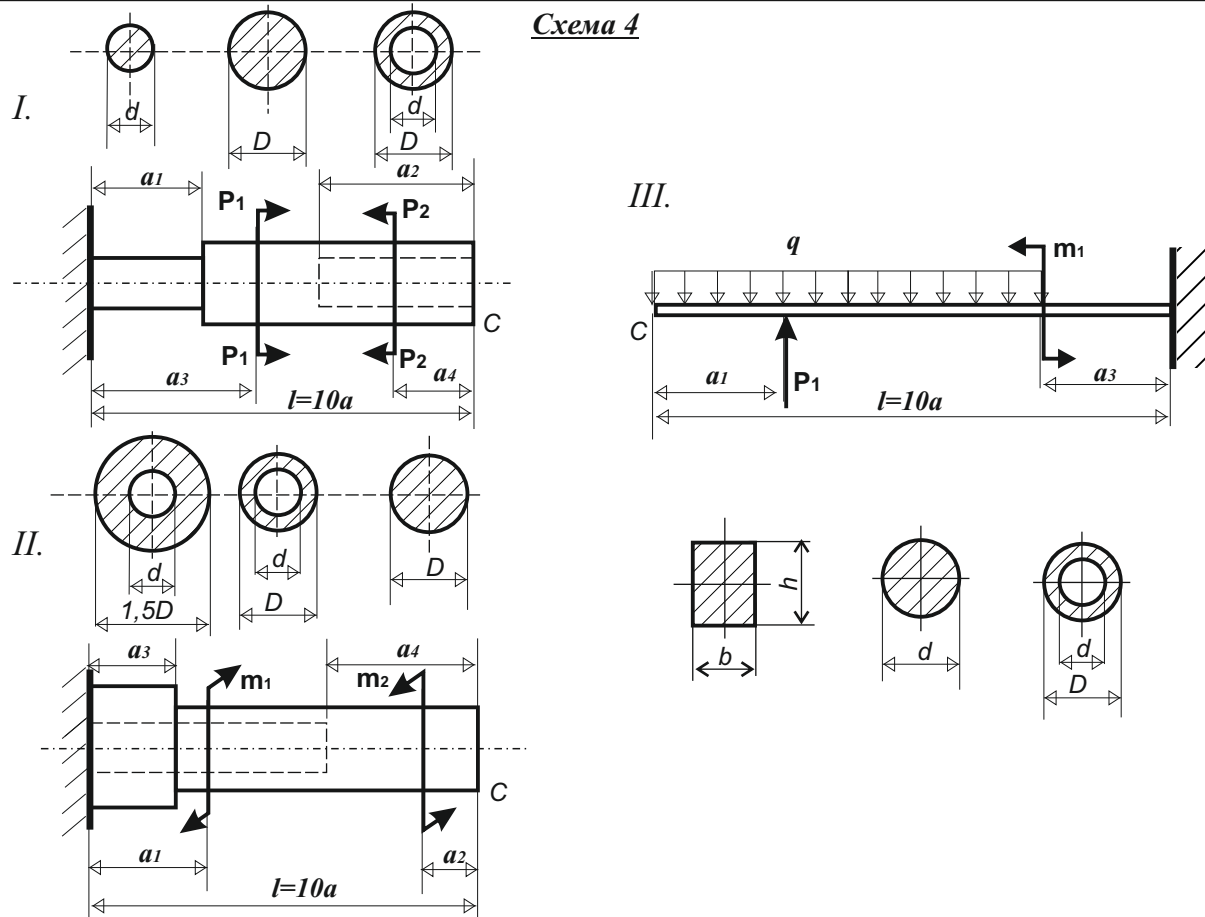


Схема 4



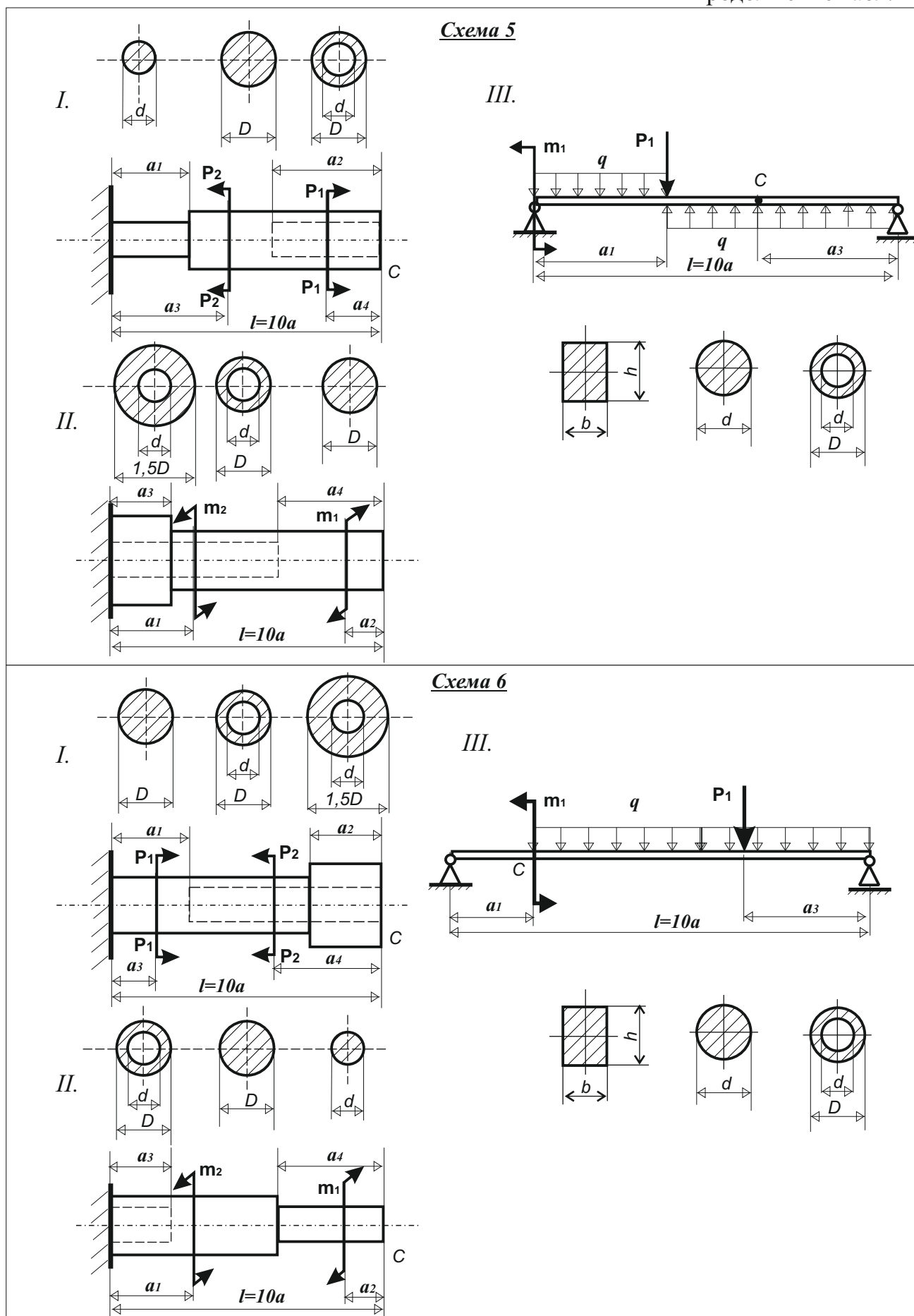


Схема 7

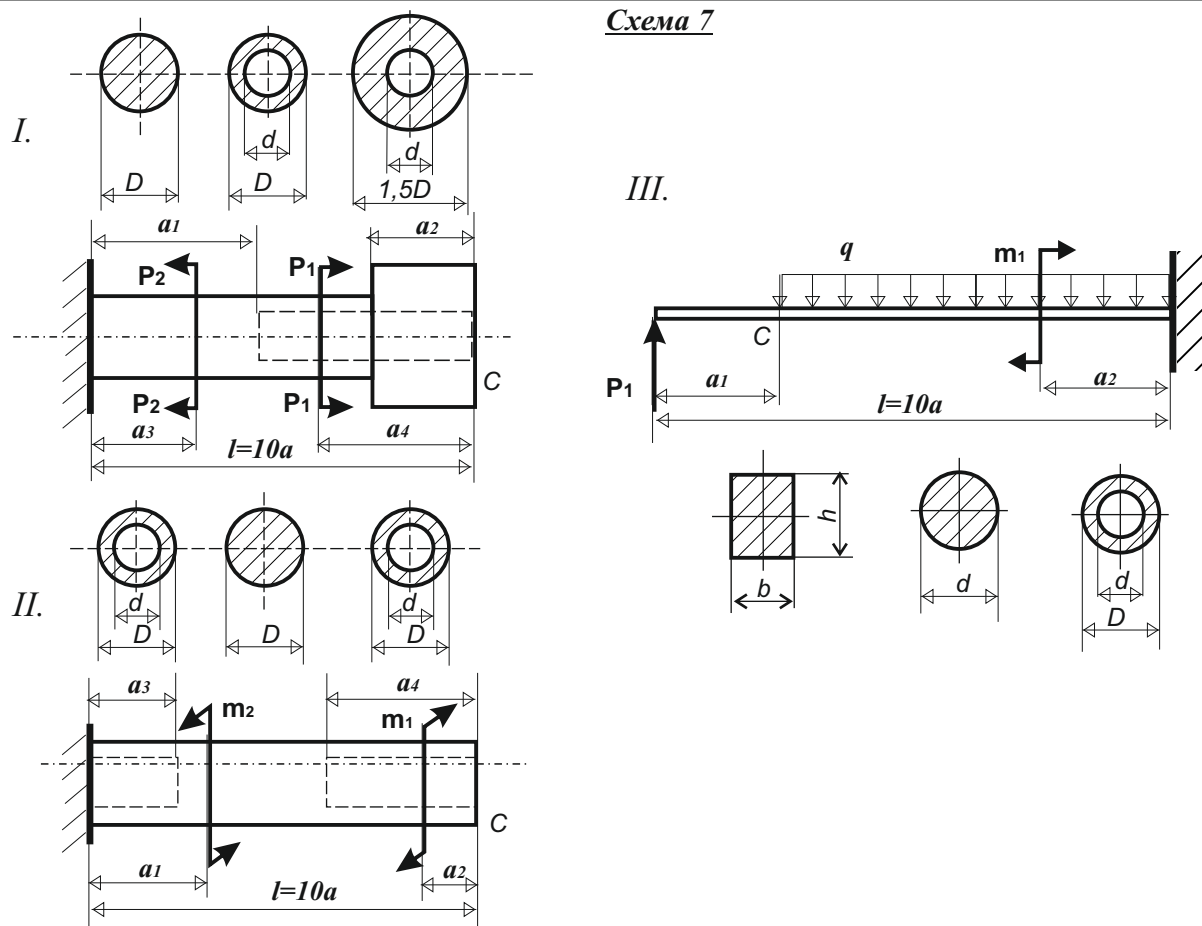
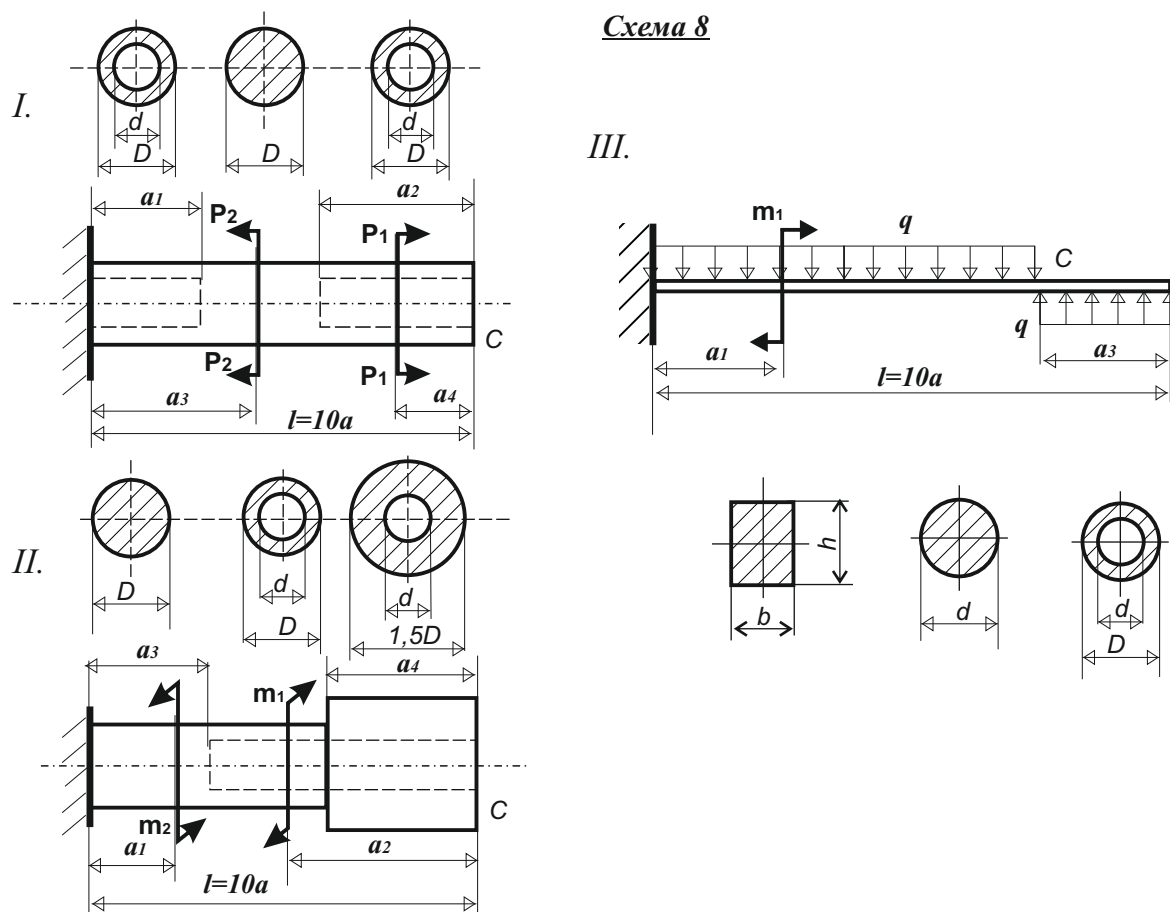
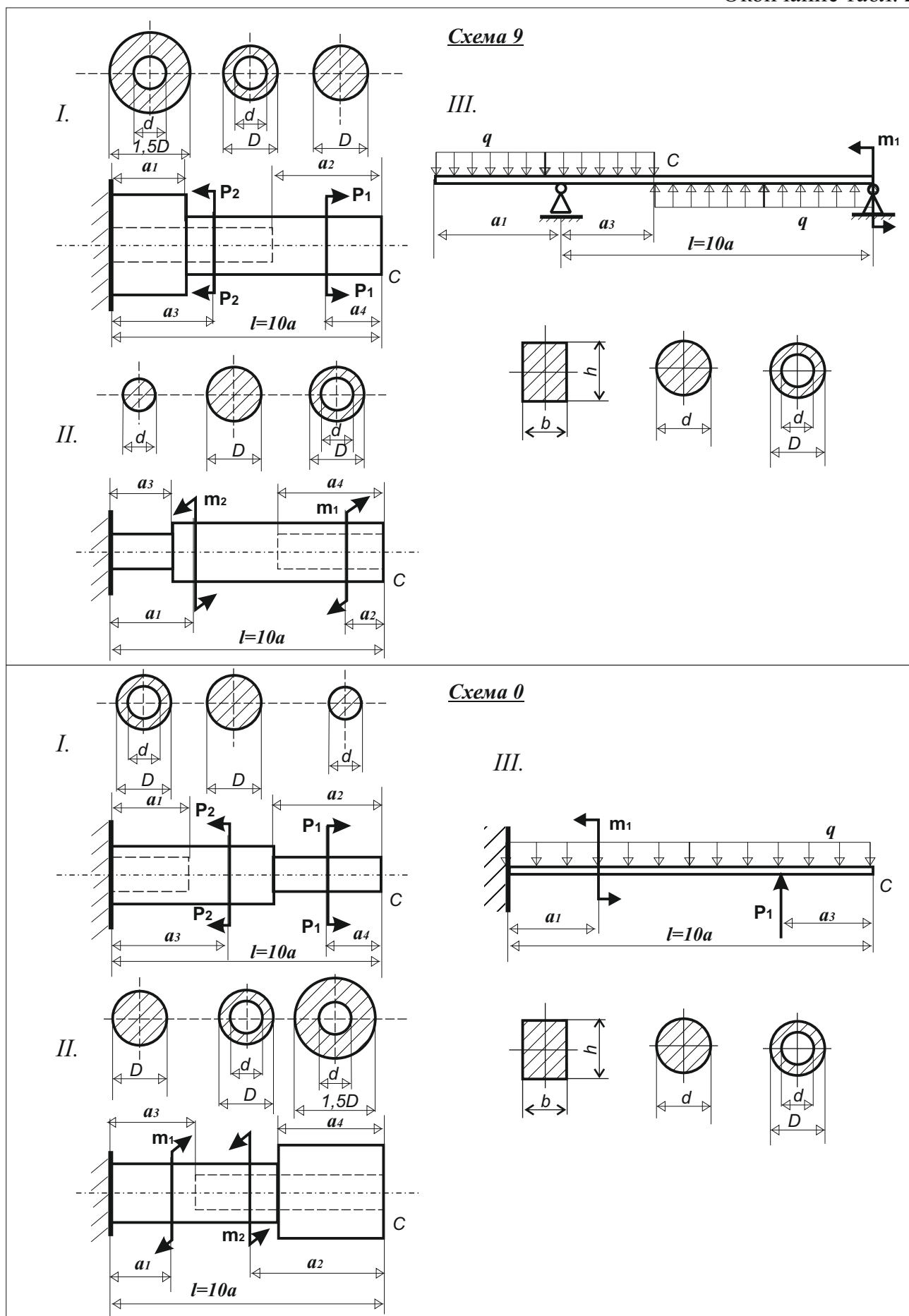


Схема 8





Механические характеристики пластмасс

Таблица 3

Марка	Модуль упругости E , МПа	Предел прочности при растяжении σ_{σ}^p , МПа	Предел прочности при сжатии σ_{σ}^c , МПа
Полистирол ПСМД	2700	37	100
Сополимеры полиамида	1600	70	120
Капролон В	2100	90	110
Капрон	2800	65	110
Фенопласт У5-301-41	2300	50	180

Механические характеристики чугуна

Таблица 4

Марка	Модуль упругости E , МПа	Предел прочности при растяжении σ_{σ}^p , МПа	Предел прочности при сжатии σ_{σ}^c , МПа
СЧ 18-36	80000	180	700
СЧ 24-44	110000	240	1000
СЧ 32-52	130000	320	1200
СЧ 38-60	160000	380	1400
СЧ 40-64	170000	400	1600

Механические характеристики стали

Таблица 5

Марка	Модуль упругости E , МПа	Модуль сдвига G , МПа	Предел текучести σ_m , МПа	Предел прочности σ_{σ} , МПа
Ст. 20	200000	80000	250	420
Ст. 30	200000	80000	300	500
Ст. 40	200000	80000	340	580
Ст. 50	200000	80000	380	640
Ст. 60	200000	80000	410	690

Механические характеристики сплавов цветных металлов

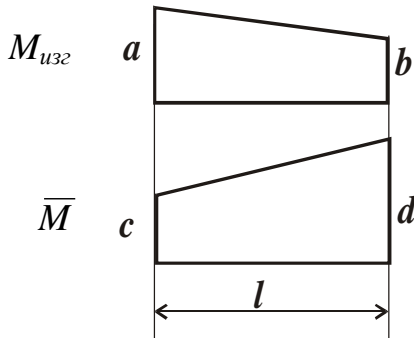
Таблица 6

Марка	Модуль упругости E , МПа	Модуль сдвига G , МПа	Предел текучести σ_m , МПа	Предел прочности σ_{σ} , МПа
латунь				
ЛО 90-1	105000	40000	85	280
ЛО 70-1	105000	40000	110	350
ЛС 74-3	105000	40000	120	350
ЛС 63-3	105000	40000	120	320
ЛС 60-1	105000	40000	130	370
Алюминиевые сплавы				
АМг 3	70000	27000	80	180
АМг 5	70000	27000	110	250
АМг 6	70000	27000	150	300
АД 31	70000	27000	130	200
АД 33	70000	27000	180	250
Титановые сплавы				
ВТ 5	110000	42000	630	700
ВТ 6	110000	42000	750	800
ВТ 14	110000	42000	800	900
ВТ 20	110000	42000	830	950
ВТ 21	110000	42000	860	1000

Форма сечения	Моменты инерции		Моменты сопротивления	
	при изгибе	при кручении	при изгибе	при кручении
	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$	$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
	$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - k^4)$ $k = \frac{d}{D}$	$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - k^4)$ $k = \frac{d}{D}$	$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - k^4)$ $k = \frac{d}{D}$	$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - k^4)$ $k = \frac{d}{D}$
	$J_x = \frac{bh^3}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12}$	$J_k = \alpha b^4$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$W_k = \beta b^3$

Формулы трапеции для перемножения эпюр

Таблица 5

Перемножение прямолинейной и криволинейной трапеций	Перемножение прямолинейных трапеций
	
$(M_{u32} \times \bar{M}) = \frac{l}{6} (ac + bd + 2h_{cp}(c + d))$	$(M_{u32} \times \bar{M}) = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc)$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Задание:

Провести проектировочный расчет на прочность и проверочный расчет на жесткость заданных статически определимых упругих систем.

Превратить системы в статически неопределимые, добавляя дополнительную опору, и выполнить проверочный расчет на прочность.

Исходные данные:

№: 4 5 7
A B C

Схема № 7;

$l=10a=1,0$ м; $a=0,1$ м; $a_1=3a=0,3$ м; $a_2=5a=0,5$ м; $a_3=2a=0,2$ м; $a_4=5a=0,5$ м;

$q=15$ кН/м; $P_1=2qa=3$ кН; $2P_1=6,0$ кН; $P_2=4,5qa=6,75$ кН; $2P_2=13,5$ кН;

$m_1=9,0qa^2=1,35$ кН м; $m_2=8,5qa^2=1,275$ кН м

$h=3b$; $d=0,7D$.

Материалы: брус I – Капрон; брус II – ЛО 60-1; брус III - СЧ 38-60; брус IV – ВТ-6.

Механические характеристики материалов:

Капрон: $E=2800$ МПа; $\sigma_g^p=65$ МПа; $\sigma_g^c=110$ МПа;

ЛО 60-1: $E=105000$ МПа; $G=40000$ МПа; $\sigma_m=130$ МПа; $\sigma_g=370$ МПа ;

СЧ 38-60: $E=160000$ МПа; $\sigma_g^p=380$ МПа; $\sigma_g^c=1400$ МПа ;

ВТ-6: $E=110000$ МПа; $G=42000$ МПа; $\sigma_m=750$ МПа; $\sigma_g=800$ МПа.

Коэффициент запаса принять $n=3$.

Часть I.

Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии.

Для статически определимого бруса

- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;
- построить эпюры нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений.

Жестко зафиксировать правый конец бруса, для полученной статически неопределимой системы

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- построить эпюры нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

1.1. Статически определимый брус.

Определим реактивную силу R_A , возникающую в заделке. Уравнение равновесия для статически определимого бруса:

$$R_A - 2P_1 + 2P_2 = 0 \Rightarrow R_A = 2P_1 - 2P_2 = -5qa = -7,5 \text{ кН}.$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 5a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_1 = 0,$

так как на первом участке нагружения внешние силы не действуют.

II участок: $5a \leq z \leq 7a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_2 - 2P_1 = 0 \Rightarrow N_2 = 2P_1 = 4qa = 6,0 \text{ кН},$$

III участок: $7a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_3 - 2P_1 = 0 \Rightarrow N_3 = 2P_1 = 4qa = 6,0 \text{ кН},$$

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_5 - 2P_1 + 2P_2 = 0 \Rightarrow N_5 = 2P_1 - 2P_2 = -5qa = -7,5 \text{ кН}.$$

Выразим площади поперечных сечений через параметр D - диаметр сечения на третьем участке нагружения ($d=0,7D$).

I участок: $F_1 = \frac{\pi((1,5D)^2 - d^2)}{4} = 1,382D^2;$

II участок: $F_2 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0,401D^2;$

III участок: $F_3 = \frac{\pi D^2}{4} = 0,785D^2;$

IV участок: $F_4 = \frac{\pi D^2}{4} = 0,785D^2$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные напряжения, является третий участок нагружения.

Составим условие прочности для третьего участка:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{4qa}{0,401D^2} \leq [\sigma]^p = \frac{\sigma_6^p}{n} = 21,6 \text{ МПа}$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[p]{\frac{4qa}{[\sigma]}} = \sqrt[p]{\frac{4 \cdot 15000 \cdot 0,1}{21,6 \cdot 10^6 \cdot 0,401}} = 0,02626 \text{ м.}$$

Принимаем $D=0,0263 \text{ м} = 26,3 \text{ мм}$, $d=0,7D=0,01841 \text{ м} = 18,41 \text{ мм}$

Площади поперечных сечений бруса:

I участок: $F_1 = 9,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

II участок: $F_2 = 2,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

III участок: $F_3 = 5,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

IV участок: $F_4 = 5,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

Напряжения в поперечных сечениях статически определимого бруса

I участок: $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = 0 \text{ МПа}$;

II участок: $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = 9,99 \frac{qa}{D^2} = 21,66 \text{ МПа}$;

III участок: $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = 5,09 \frac{qa}{D^2} = 11,04 \text{ МПа}$;

IV участок: $\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = -6,37 \frac{qa}{D^2} = -13,81 \text{ МПа}$;

Определим абсолютное удлинение бруса, как сумму удлинения участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4,$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = 0;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = 19,97 \frac{qa^2}{ED^2} = 1,547 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = 5,09 \frac{qa^2}{ED^2} = 0,394 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E F_4} = -12,73 \frac{qa^2}{ED^2} = -0,986 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 12,33 \frac{qa^2}{ED^2} = 0,955 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Определим перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $\Delta_A = 0$;

сечение B : $\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_4 = -0,986 \text{ мм}$;

сечение E : $\Delta_E = \Delta_B + \Delta l_3 = -0,592 \text{ мм}$;

сечение G : $\Delta_G = \Delta_E + \Delta l_2 = 0,955 \text{ мм}$;

сечение C : $\Delta_C = \Delta_G + \Delta l_1 = 0,955 \text{ мм}$.

1.2. Статически неопределимый брус.

Уравнение равновесия для статически неопределимого бруса:

$$R_A - 2P_1 + 2P_2 - R_C = 0 \quad \Rightarrow \quad s = m - n = 2 - 1, \quad \text{система один раз статически неопределима. Раскроем статическую неопределимость, т.е. определим неизвестные реакции в жестких заделках } A \text{ и } C.$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 5a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_1 - R_C = 0 \Rightarrow N_1 = R_C$,

II участок: $5a \leq z \leq 7a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_2 - R_C - 2P_1 = 0 \Rightarrow N_2 = 2P_1 + R_C$,

III участок: $7a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_3 - R_C - 2P_1 = 0 \Rightarrow N_3 = 2P_1 + R_C$,

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_4 - R_C - 2P_1 + 2P_2 = 0 \Rightarrow N_4 = 2P_1 - 2P_2 + R_C$$

Для защемленного обоими концами стержня полное абсолютное удлинение должно быть равным нулю:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0, \text{ где}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{R_C \cdot 5a}{E \cdot 1,382 D^2};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{(2P_1 + R_C) \cdot 2a}{E \cdot 0,401 D^2};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{(2P_1 + R_C) \cdot a}{E \cdot 0,785 D^2};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E F_4} = \frac{(2P_1 - 2P_2 + R_C) \cdot 2a}{E \cdot 0,785 D^2};$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{R_C \cdot 5a}{E \cdot 1,382 D^2} + \frac{(2P_1 + R_C) \cdot 2a}{E \cdot 0,401 D^2} + \frac{(2P_1 + R_C) \cdot a}{E \cdot 0,785 D^2} + \frac{(2P_1 - 2P_2 + R_C) \cdot 2a}{E \cdot 0,785 D^2} = 0$$

$$\frac{R_C \cdot 5}{1,382} + \frac{(4qa + R_C) \cdot 2}{0,401} + \frac{(4qa + R_C)}{0,785} + \frac{(-5qa + R_C) \cdot 2}{0,785} = 0$$

Разрешая это уравнение относительно R_C , получим $R_C = -0,992qa = -1,488 \text{ кН}$.

Из уравнения равновесия находим $R_A = 2P_1 - 2P_2 + R_C$, $R_A = -5,992qa = -8,988 \text{ кН}$

Продольные усилия на участках нагружения статически неопределимого бруса

I участок: $N_1 = R_C = -0,992qa = -1,488 \text{ кН}$,

II участок: $N_2 = 2P_1 + R_C = 3,008qa = 4,512 \text{ кН}$,

III участок: $N_3 = 2P_1 + R_C = 3,008qa = 4,512 \text{ кН}$,

IV участок: $N_4 = 2P_1 - 2P_2 + R_C = -5,992qa = -8,988 \text{ кН}$

Напряжения в поперечных сечениях статически неопределимого бруса

I участок: $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = -0,72 \frac{qa}{D^2} = -1,56 \text{ МПа};$

II участок: $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = 7,51 \frac{qa}{D^2} = 15,28 \text{ МПа};$

III участок: $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = 3,83 \frac{qa}{D^2} = 8,31 \text{ МПа};$

IV участок: $\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = -7,63 \frac{qa}{D^2} = -16,55 \text{ МПа}$

Определим запас прочности статически неопределимого стержня:

$$\sigma_{max}^P = \sigma_2 = 15,28 \text{ МПа}, \quad \sigma_6^P = 65 \text{ МПа};$$

тогда коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{65}{15,28} = 3,99.$$

Выполним деформационную проверку. Определим абсолютное удлинение бруса, как сумму удлинения участков, причем полное удлинение бруса должно быть равно нулю:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \\ &= -3,59 \frac{qa^2}{ED^2} + 15,02 \frac{qa^2}{ED^2} + 3,83 \frac{qa^2}{ED^2} - 15,26 \frac{qa^2}{ED^2} = \\ &= -0,278 \cdot 10^{-3} + 1,163 \cdot 10^{-3} + 0,297 \cdot 10^{-3} - 1,182 \cdot 10^{-3} = 0 \end{aligned}$$

Определим перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка):	$\Delta_A = 0;$
сечение B :	$\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_4 = -1,182 \text{ мм};$
сечение E :	$\Delta_E = \Delta_B + \Delta l_3 = -0,885 \text{ мм};$
сечение G :	$\Delta_G = \Delta_E + \Delta l_2 = 0,278 \text{ мм};$
сечение C :	$\Delta_C = \Delta_G + \Delta l_1 = 0.$

Для статически определимого бруса

- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности (принять коэффициент запаса $n=3$);
- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.

Жестко зафиксировать правый конец бруса, для полученной статически неопределимой системы

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

1.1. Статически определимый брус.

Определим реактивный момент m_A , возникающий в заделке. Уравнение равновесия для статически определимого бруса:

$$m_A + m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_A = -m_1 + m_2 = -0,5qa^2 = -0,075 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 5a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $M_1 = 0$,

так как на первом участке нагружения внешние моменты не действуют.

II участок: $5a \leq z \leq 7a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_2 - m_1 = 0 \Rightarrow M_3 = m_1 = 9qa^2 = 1,350 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

III участок: $7a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_3 - m_1 + m_2 = 0 \Rightarrow M_4 = m_1 - m_2 = 0,5qa^2 = 0,075 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_4 - m_1 + m_2 = 0 \Rightarrow M_4 = m_1 - m_2 = 0,5qa^2 = 0,075 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выразим моменты сопротивления поперечных сечений через диаметр D ($d=0,7D$).

I участок:
$$W_{p1} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,1492D^3;$$

II участок:
$$W_{p2} = \frac{\pi D^3}{16} = 0,1963D^3;$$

III участок:
$$W_{p3} = \frac{\pi D^3}{16} = 0,1963D^3;$$

IV участок:
$$W_{p4} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,1492D^3$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$\text{I участок: } J_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,0746 D^4;$$

$$\text{II участок: } J_{p2} = \frac{\pi D^4}{32} = 0,0982 D^4;$$

$$\text{III участок: } J_{p3} = \frac{\pi D^4}{32} = 0,0982 D^4;$$

$$\text{IV участок: } J_{p4} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,0746 D^4$$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные касательные напряжения, является третий участок нагружения.

Составим условия прочности для опасного участка вала.

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = \frac{9qa^2}{0,1963D^3} \leq [\tau], \quad \text{где} \quad [\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \frac{\sigma_m}{n} = \frac{0,6 \cdot 130}{3} = 26 \text{ МПа}$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{9qa^2}{[\tau] \cdot 0,1963}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 15000 \cdot 0,01}{26 \cdot 10^6 \cdot 0,1963}} = 0,06419 \text{ м.}$$

Принимаем $D = 0,065 \text{ м} = 65,0 \text{ мм}$, $d = 0,7D = 0,0455 \text{ м} = 45,5 \text{ мм}$

Полярные моменты сопротивления поперечных сечений бруса:

$$\text{I участок: } W_{p1} = 40,98 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{II участок: } W_{p2} = 53,92 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{III участок: } W_{p3} = 53,92 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{IV участок: } W_{p4} = 40,98 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$\text{I участок: } J_{p1} = 133,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{II участок: } J_{p2} = 175,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{III участок: } J_{p3} = 175,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{IV участок: } J_{p4} = 133,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях статически определимого бруса

$$\text{I участок: } \tau_1 = \frac{M_1}{W_{p1}} = 0 \text{ МПа};$$

$$\text{II участок: } \tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = 45,84 \frac{qa^2}{D^3} = 25,04 \text{ МПа};$$

$$\text{III участок: } \tau_3 = \frac{M_3}{W_{p3}} = 2,55 \frac{qa^2}{D^3} = 1,39 \text{ МПа};$$

$$\text{IV участок: } \tau_4 = \frac{M_4}{W_{p4}} = 3,35 \frac{qa^2}{D^3} = 1,83 \text{ МПа}$$

Определим абсолютный угол закручивания бруса, как сумму углов закручивания участков:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = 0;$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = 183,35 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,00385 \text{ рад} = 0,221 \text{ град};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = 5,09 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,00011 \text{ рад} = 0,006 \text{ град};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = 13,40 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,00028 \text{ рад} = 0,016 \text{ град};$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 201,84 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,00424 \text{ рад} = 0,243 \text{ град}$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $\varphi_A = 0;$

сечение B : $\varphi_B = \varphi_A + \varphi_4 = 0,00028 \text{ рад} = 0,016 \text{ град};$

сечение E : $\varphi_E = \varphi_B + \varphi_3 = 0,00039 \text{ рад} = 0,022 \text{ град};$

сечение G : $\varphi_G = \varphi_E + \varphi_2 = 0,00424 \text{ рад} = 0,243 \text{ град};$

сечение C : $\varphi_C = \varphi_G + \varphi_1 = 0,00424 \text{ рад} = 0,243 \text{ град}$

2.2. Статически неопределимый брус.

Уравнение равновесия для статически неопределимого бруса:

$m_A + m_1 - m_2 - m_C = 0 \Rightarrow s = m - n = 2 - 1$, система один раз статически неопределима.

Раскроем статическую неопределимость, т.е. определим неизвестные реактивные моменты в жестких заделках A и C .

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 5a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $M_1 + m_C = 0 \Rightarrow M_1 = -m_C,$

II участок: $5a \leq z \leq 7a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_2 - m_1 + m_C = 0 \Rightarrow M_2 = m_1 - m_C,$$

III участок: $7a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_3 - m_1 + m_2 + m_C = 0 \Rightarrow M_3 = +m_1 - m_2 - m_C,$$

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_4 - m_1 + m_2 + m_C = 0 \Rightarrow M_4 = +m_1 - m_2 - m_C$$

Для защемленного обоими концами стержня полный угол закручивания должен быть равным нулю: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$, где

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = \frac{-m_C 5a}{G 0,0746 D^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = \frac{(-m_C + m_1) 2a}{G 0,0982 D^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = \frac{(-m_C + m_1 - m_2) a}{G 0,0982 D^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = \frac{(-m_C + m_1 - m_2) 2a}{G 0,0746 D^4};$$

Тогда

$$\frac{-m_C 5a}{G 0,0746 D^4} + \frac{(-m_C + m_1) 2a}{G 0,0982 D^4} + \frac{(-m_C + m_1 - m_2) a}{G 0,0982 D^4} + \frac{(-m_C + m_1 - m_2) 2a}{G 0,0746 D^4} = 0$$

$$\frac{-m_C 5}{0,0746} + \frac{(-m_C + 9qa^2) 2}{0,0982} + \frac{(-m_C + 0,5qa^2)}{0,0982} + \frac{(-m_C + 0,5qa^2) 2}{0,0746} = 0$$

Разрешая это уравнение относительно m_C , получим $m_C = 1,623qa^2 = 0,243 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из уравнения равновесия находим $m_A = -m_1 + m_2 + m_C$, $m_A = 1,123qa^2 = 0,168 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Крутящие моменты на участках нагружения статически неопределимого бруса

I участок: $M_1 = -1,623qa^2 = -0,243 \text{ кН} \cdot \text{м},$

II участок: $M_2 = 7,377qa^2 = 1,107 \text{ кН} \cdot \text{м},$

III участок: $M_3 = -1,123qa^2 = -0,168 \text{ кН} \cdot \text{м},$

IV участок: $M_4 = -1,123qa^2 = -0,168 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях статически неопределимого бруса

I участок: $\tau_1 = \frac{M_1}{W_{p1}} = -10,88 \frac{qa^2}{D^3} = -5,94 \text{ МПа};$

II участок: $\tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = 37,57 \frac{qa^2}{D^3} = 20,52 \text{ МПа};$

III участок: $\tau_3 = \frac{M_3}{W_{p3}} = -5,72 \frac{qa^2}{D^3} = -3,12 \text{ МПа};$

IV участок: $\tau_4 = \frac{M_4}{W_{p4}} = -7,52 \frac{qa^2}{D^3} = -4,11 \text{ МПа};$

Определим запас прочности статически неопределимого стержня:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = 20,52 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = 130 \text{ МПа};$$

тогда коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{0,6 \cdot 130}{20,52} = 3,80.$$

Выполним деформационную проверку. Определим абсолютный угол закручивания бруса, как сумму углов закручивания участков, причем полный угол закручивания бруса должен быть равен нулю: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = -108,76 \frac{qa^3}{GD^4} = -0,00228 \text{ рад} = -0,131 \text{ град};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = 150,29 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,00316 \text{ рад} = 0,181 \text{ град};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = -11,44 \frac{qa^3}{GD^4} = -0,00024 \text{ рад} = -0,014 \text{ град};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = -30,10 \frac{qa^3}{GD^4} = -0,00063 \text{ рад} = -0,036 \text{ град};$$

$$\text{Тогда} \quad -0,131 + 0,181 - 0,014 - 0,036 = 0$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

$$\text{сечение } A \text{ (жесткая заделка):} \quad \varphi_A = 0;$$

$$\text{сечение } B: \quad \varphi_B = \varphi_A + \varphi_4 = -0,00063 \text{ рад} = -0,036 \text{ град};$$

$$\text{сечение } E: \quad \varphi_E = \varphi_B + \varphi_3 = -0,00087 \text{ рад} = -0,050 \text{ град};$$

$$\text{сечение } G: \quad \varphi_G = \varphi_E + \varphi_2 = 0,00228 \text{ рад} = 0,131 \text{ град};$$

$$\text{сечение } C: \quad \varphi_C = \varphi_G + \varphi_1 = 0.$$

Часть III.

Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

Для статически определимой балки

- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- подобрать поперечное сечение заданной формы, исходя из условий прочности (принять коэффициент запаса $n=3$);

- построить графики нормальных и касательных напряжений в опасном сечении;
- определить перемещение сечения С.

Добавить подвижную шарнирную опору в сечении С, для полученной статически неопределимой системы

- раскрыть статическую неопределимость;
- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- построить приближенный вид упругой линии статически неопределимой балки;
- выполнить деформационную проверку;
- определить запас прочности.

1.1. Статически определимая балка.

Определим реакции в жесткой заделке R_A , m_A . Уравнения равновесия для статически определимой балки:

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A + P_1 - q \cdot 7a = 0 \\ m_A - P_1 \cdot 10a - m_1 + q \cdot 7a \cdot 3,5a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = -P_1 + q \cdot 7a = 5qa = 7,5 \text{ кН};$$

$$m_A = P_1 \cdot 10a + m_1 - q \cdot 7a \cdot 3,5a = 4,5qa^2 = 0,675 \text{ кНм}$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 3a$ (слева)

$$Q_1 = P_1$$

$$M_1 = P_1 z$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = P_1 = 2,0qa = 3,0 \text{ кН} \quad Q_{1(z=3a)} = P_1 = 2qa = 3,0 \text{ кН}$$

$$M_{1(z=0)} = 0 \quad M_{1(z=3a)} = P_1 3a = 6qa^2 = 0,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

II участок: $3a \leq z \leq 5a$

$$Q_2 = P_1 - q(z - 3a)$$

$$M_2 = P_1 z - 0,5q(z - 3a)^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=3a)} = P_1 = 2qa = 3,0 \text{ кН} \quad Q_{2(z=5a)} = P_1 - 2qa = 0$$

$$M_{2(z=3a)} = P_1 3a = 6qa^2 = 0,9 \text{ кНм} \quad M_{2(z=5a)} = P_1 5a - 2qa^2 = 8qa^2 = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

III участок: $5a \leq z \leq 10a$

$$Q_3 = P_1 - q(z - 3a)$$

$$M_3 = P_1 z - 0,5q(z - 3a)^2 + m_1$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=5a)} = P_1 - 2qa = 0 \quad Q_{3(z=10a)} = P_1 - 7qa = -5qa = -7,5 \text{ кН}$$

$$M_{3(z=5a)} = P_1 5a - 2qa^2 + m_1 = 17qa^2 = 2,55 \text{ кНм}$$

$$M_{3(z=10a)} = P_1 10a - 24,5qa^2 + m_1 = 4,5qa^2 = 0,675 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Максимальное по модулю значение момента приходится на сечение в котором поперечная сила обращается в ноль.

Тогда $M_{max} = M_{3(z=5a)} = 2,55 \text{ кНм}$ - по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Определим положение центра тяжести поперечного сечения.

Сечение имеет ось симметрии Y.

Выразим площадь поперечного сечения через параметр c . $F = 11c^2$. Сечение разобьем на две части – прямоугольники с центрами тяжести в точках C_1, C_2 (второй прямоугольник – вырезан).

$S_{x_1} = S_1 + S_2 = 12c^2 \cdot 2c - c^2 \cdot 3,5c = 20,5c^3$ - статический момент площади сечения относительно оси X_1 .

Ордината центра тяжести C может быть определена по формуле $Y_C = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{20,5c^3}{11c^2} = 1,8636c$.

Нейтральная ось сечения проходит через центр тяжести сечения C .

Вычислим момент инерции поперечного сечения балки.

Главный центральный момент инерции сечения равен разности моментов инерции частей сечения (a_i – расстояния между центральными осями частей и центральной осью сечения)

$$J_i = \frac{b_i h_i^3}{12} + a_i^2 F_i, i = 1, 2;$$

$$J_x = J_1 - J_2 = \frac{3c(4c)^3}{12} + (0,1363c)^2 \cdot 12c^2 - \frac{c \cdot c^3}{12} - (1,6363c)^2 \cdot c^2 = 13,462 c^4$$

Моменты сопротивления сечения вычисляем для волокон, работающих на растяжение (нижняя граница сечения) – W_2 , и волокон, работающих на сжатие (верхняя граница сечения) – W_1 .

$$W_1 = \frac{J_x}{4c - Y_C} = \frac{13,462 c^4}{2,1363c} = 6,301c^3; \quad W_2 = \frac{J_x}{Y_C} = \frac{13,462 c^4}{1,8636c} = 7,224c^3.$$

Составим условия прочности для опасного сечения для волокон, работающих на растяжение (нижние волокна), и для волокон, работающих на сжатие (верхние волокна):

$$\sigma_{max}^p = \frac{|M_{max}|}{W_2} = \frac{17qa^2}{7,224c^3} \leq [\sigma]^p = \frac{\sigma_{\sigma}^p}{n} = \frac{380}{3} = 126,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{max}^c = \frac{|M_{max}|}{W_1} = \frac{17qa^2}{6,301c^3} \leq [\sigma]^c = \frac{\sigma_{\sigma}^c}{n} = \frac{1400}{3} = 466,6 \text{ МПа}$$

Определим параметр c из условий прочности:

$$c_1 \geq \sqrt[3]{\frac{17qa^2}{[\sigma]^p 7,224}} = \sqrt[3]{\frac{17 \cdot 15000 \cdot 0,1^2}{126,6 \cdot 10^6 \cdot 7,224}} = 0,01407 \text{ м}$$

$$c_2 \geq \sqrt[3]{\frac{17qa^2}{[\sigma]^c 6,301}} = \sqrt[3]{\frac{17 \cdot 15000 \cdot 0,1^2}{466,6 \cdot 10^6 \cdot 6,301}} = 0,00954 \text{ м}$$

Принимаем $c = 0,0141 \text{ м} = 14,1 \text{ мм}$.

Осевой момент инерции поперечного сечения балки:

$$J_x = 13,462 c^4 = 53,210 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

Моменты сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_1 = 6,301c^3 = 17,664 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_2 = 7,223c^3 = 20,249 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении статически определимой балки (с учетом правила знаков для напряжений):

$$\sigma_{max}^c = -\frac{|M_{max}|}{W_1} = -144,36 \text{ МПа}, \quad \sigma_{max}^p = \frac{|M_{max}|}{W_2} = +125,93 \text{ МПа}.$$

Определим касательные напряжения в опасном сечении по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{QS_x^{omc}}{BJ_x} = 0, \text{ т.к. в опасном сечении поперечная сила } Q=0 \text{ кН, } B - \text{ ширина сечения,}$$

S_x^{omc} - статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси.

Определим касательные напряжения в сечении, где поперечная сила достигает максимального значения $Q_{max}=7,5 \text{ кН}$.

$$\tau_{1-1} = \frac{QS_{1-1}^{omc}}{2cJ_x} = 0, \quad S_{1-1}^{omc} = 0,$$

$$\tau_{2-2} = \frac{QS_{2-2}^{omc}}{2cJ_x} = 4,59 \text{ МПа}, \quad S_{2-2}^{omc} = 9c^2 \cdot 0,3636c$$

$$\tau_{2'-2'} = \frac{QS_{2'-2'}^{omc}}{3cJ_x} = 3,06 \text{ МПа}, \quad S_{2'-2'}^{omc} = 9c^2 \cdot 0,3636c$$

$$\tau_{max} = \frac{QS_{2-2}^{omc}}{3cJ_x} = 4,87 \text{ МПа}, \quad S_{2-2}^{omc} = 3c \cdot 1,8636c \cdot 0,5 \cdot 1,8636c$$

$$\tau_{3-3} = \frac{QS_{3-3}^{omc}}{3cJ_x} = 0, \quad S_{3-3}^{omc} = 0$$

Определим перемещение сечения С, пользуясь методом Верещагина:

$$y_C = \frac{1}{EJ_x} (\bar{M} \times M_{изг});$$

$$\theta_C = \frac{1}{EJ_x} (\bar{\bar{M}} \times M_{изг}).$$

Эпюры изгибающих моментов \bar{M} , $\bar{\bar{M}}$ от действия единичной силы и единичного момента, приложенных в сечении С, и $M_{изг}$ от действия внешних нагрузок перемножаем, пользуясь формулами для перемножения криволинейной и прямолинейной трапеций:

$$(\bar{M} \times M_{изг}) = \frac{l}{6} (ac + bd + 2h_{cp}(c + d));$$

$$y_C = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{l_1}{6} (a_1c_1 + b_1d_1 + 2h_{1cp}(c_1 + d_1)) + \frac{l_2}{6} (a_2c_2 + b_2d_2 + 2h_{2cp}(c_2 + d_2)) \right) =$$

$$= -\frac{278,042qa^4}{EJ_x} = -0,00490 \text{ м};$$

$$\text{где } c_1 = 0; d_1 = -2a; c_2 = -2a; d_2 = -7a;$$

$$l_1 = 2a; \quad l_2 = 5a;$$

$$a_1 = 6qa^2 = 0,9 \text{ кН м}; \quad b_1 = 8qa^2 = 1,200 \text{ кН м};$$

$$h_{1cp} = 7,5qa^2 = 1,125 \text{ кН м};$$

$$a_2 = 17qa^2 = 2,55 \text{ кН м}; \quad b_2 = 4,5qa^2 = 0,675 \text{ кН м};$$

$$h_{2cp} = 13,875qa^2 = 2,081 \text{ кН м};$$

знак «-» означает, что перемещение направлено в сторону противоположную направлению единичной нагрузки.

$$\theta_c = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{l_1}{6} (a_1 c_1 + b_1 d_1 + 2h_{1cp} (c_1 + d_1)) + \frac{l_2}{6} (a_2 c_2 + b_2 d_2 + 2h_{2cp} (c_2 + d_2)) \right) =$$

$$= \frac{67,75qa^3}{EJ_x} = 0,01194 \text{ рад}$$

$$\text{где } c_1 = l; d_1 = l; c_2 = l; d_2 = l$$

знак «+» угла поворота сечения означает, что угловое перемещение совпадает по направлению с единичным моментом.

2.2. Статически неопределимая балка.

Уравнения равновесия для статически неопределимой балки:

$$\begin{cases} R_A - R_C + P_1 - q \cdot 7a = 0 \\ m_A + R_C \cdot 7a - P_1 \cdot 10a - m_1 + q \cdot 7a \cdot 3,5a = 0 \end{cases}$$

Система один раз статически неопределима: $s = 3 - 2 = 1$.

Раскроем статическую неопределимость, пользуясь методом сил.

В качестве эквивалентной системы выбираем статически определимую балку, нагруженную неизвестной силой X_1 в сечении C в направлении отброшенной связи – подвижного шарнира. Условие эквивалентности – равенство нулю прогиба в сечении C – запишем в виде уравнения метода сил для один раз статически неопределимой системы: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$. δ_{11} – прогиб сечения C , вызванный единичной силой, приложенной в сечении C в направлении X_1 . Δ_{1P} – прогиб сечения C от действия внешней нагрузки (определен для статически определимой балки) $\Delta_{1P} = y_C$.

Определим δ_{11} , пользуясь методом Верещагина. Умножим эпюру от действия единичной силы саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} (\overline{M} \times \overline{M}) = \frac{1}{EJ_x} (\Omega_1 \overline{M}_1) = \frac{114,33a^3}{EJ_x},$$

$$\overline{M}_1 = \frac{2}{3} 7a, \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} 7a \cdot 7a$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 2,432qa = 3,648 \text{ кН}, \quad R_C = 3,648 \text{ кН}.$$

Из уравнений равновесия находим значения реакций

$$R_A = 7,432qa = 11,148 \text{ кН}, \quad m_A = -12,523qa^2 = -1,878 \text{ кНм}.$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 3a$ (слева)

$$Q_1 = P_1$$

$$M_1 = P_1 z$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = P_1 = 2,0qa = 3,0 \text{ кН} \quad Q_{1(z=3a)} = P_1 = 2qa = 3,0 \text{ кН}$$

$$M_{1(z=0)} = 0 \quad M_{1(z=3a)} = P_1 3a = 6qa^2 = 0,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

II участок: $3a \leq z \leq 5a$

$$Q_2 = P_1 - X_1 - q(z - 3a)$$

$$M_2 = P_1 z - X_1(z - 3a) - 0,5q(z - 3a)^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=3a)} = -0,432qa = -0,648 \text{ кН}$$

$$Q_{2(z=5a)} = -2,432qa = -3,648 \text{ кН}$$

$$M_{2(z=3a)} = 6qa^2 = 0,9 \text{ кНм}$$

$$M_{2(z=5a)} = 3,136qa^2 = 0,47 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

III участок: $5a \leq z \leq 10a$

$$Q_3 = P_1 - X_1 - q(z - 3a)$$

$$M_3 = P_1 z - X_1(z - 3a) - 0,5q(z - 3a)^2 + m_1$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=5a)} = -2,432qa = -3,648 \text{ кН}$$

$$Q_{3(z=10a)} = -7,432qa = -11,148 \text{ кН}$$

$$M_{3(z=5a)} = 12,136qa^2 = 1,82 \text{ кНм}$$

$$M_{3(z=10a)} = -12,523qa^2 = -1,878 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Выполним деформационную проверку – убедимся, что прогиб в сечении С (на опоре С) равен нулю. Перемещение определяем по методу Верещагина, перемножая эпюру изгибающего момента для статически неопределимой балки и эпюру момента от действия единичной силы в сечении С:

$$y_C = \frac{1}{EJ_X} (\bar{M} \times M_{изг}) = \frac{1}{EJ_X} \left(\frac{l_1}{6} (a_1 c_1 + b_1 d_1 + 2h_{cp}^1 (c_1 + d_1)) + \frac{l_2}{6} (a_2 c_2 + b_2 d_2 + 2h_{cp}^2 (c_2 + d_2)) \right) =$$

$$= \frac{(-8,8484 + 8,8484)qa^4}{EJ_X} = 0$$

$$\text{где } c_1 = 0; d_1 = -2a; c_2 = -2a; d_2 = -7a; l_1 = 2a; l_2 = 5a;$$

$$a_1 = 6qa^2 = 0,9 \text{ кНм}; b_1 = 3,136qa^2 = 0,470 \text{ кНм}; h_{1cp} = 5,068qa^2 = 0,760 \text{ кНм};$$

$$a_2 = 12,136qa^2 = 1,820 \text{ кНм}; b_2 = -12,523qa^2 = -1,878 \text{ кНм}; h_{2cp} = 2,932qa^2 = 0,044 \text{ кНм};$$

Опасным является сечение А третьего участка, $M_{max} = -1,878 \text{ кНм}$.

Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении статически неопределимой балки (с учетом правила знаков для напряжений):

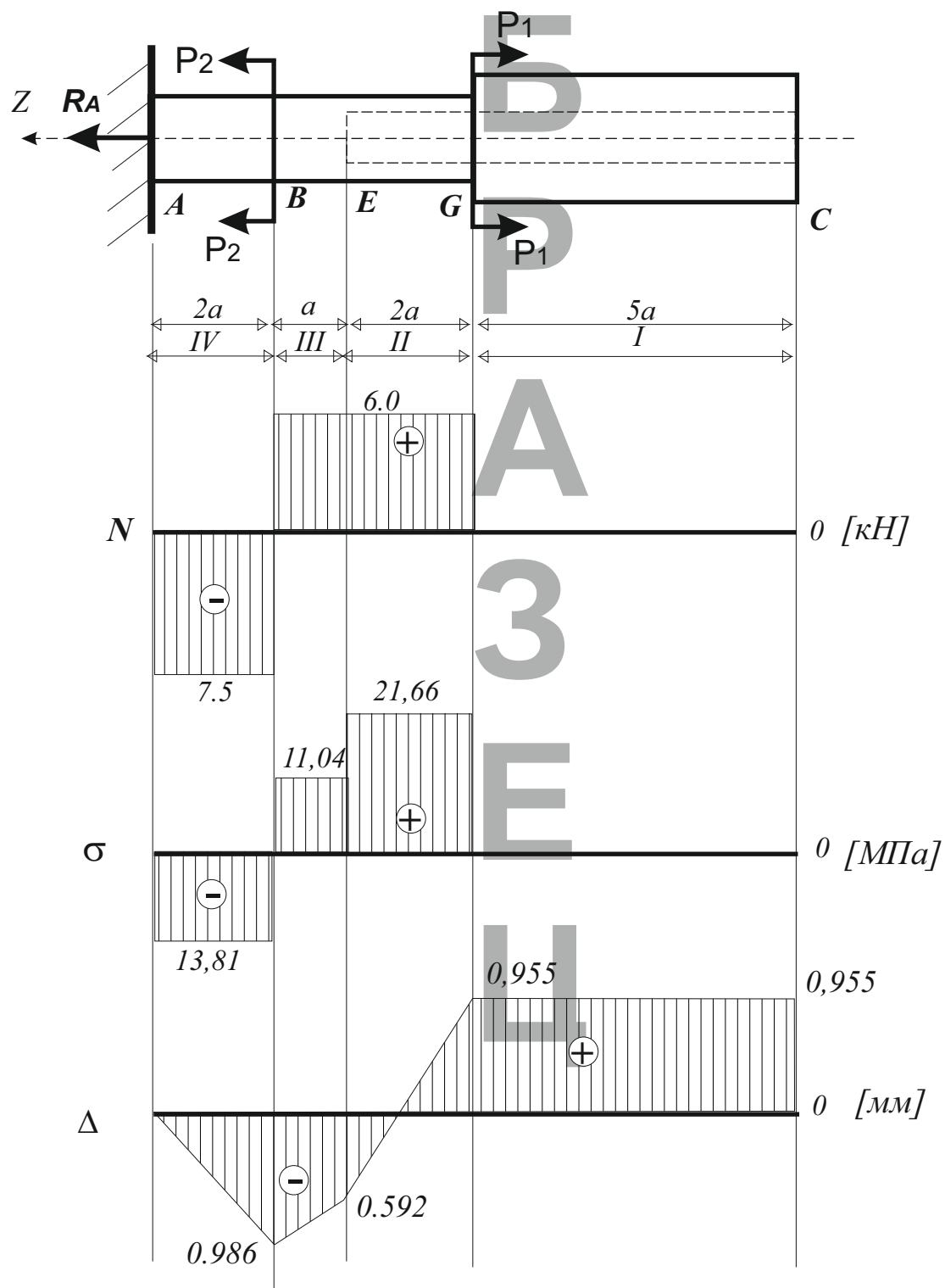
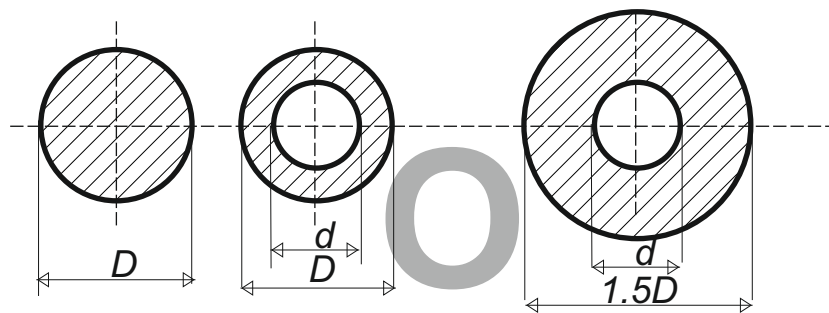
$$\sigma_{max}^c = -\frac{|M_{max}|}{W_2} = -92,77 \text{ МПа}, \quad \sigma_{max}^p = +\frac{|M_{max}|}{W_1} = 106,34 \text{ МПа}.$$

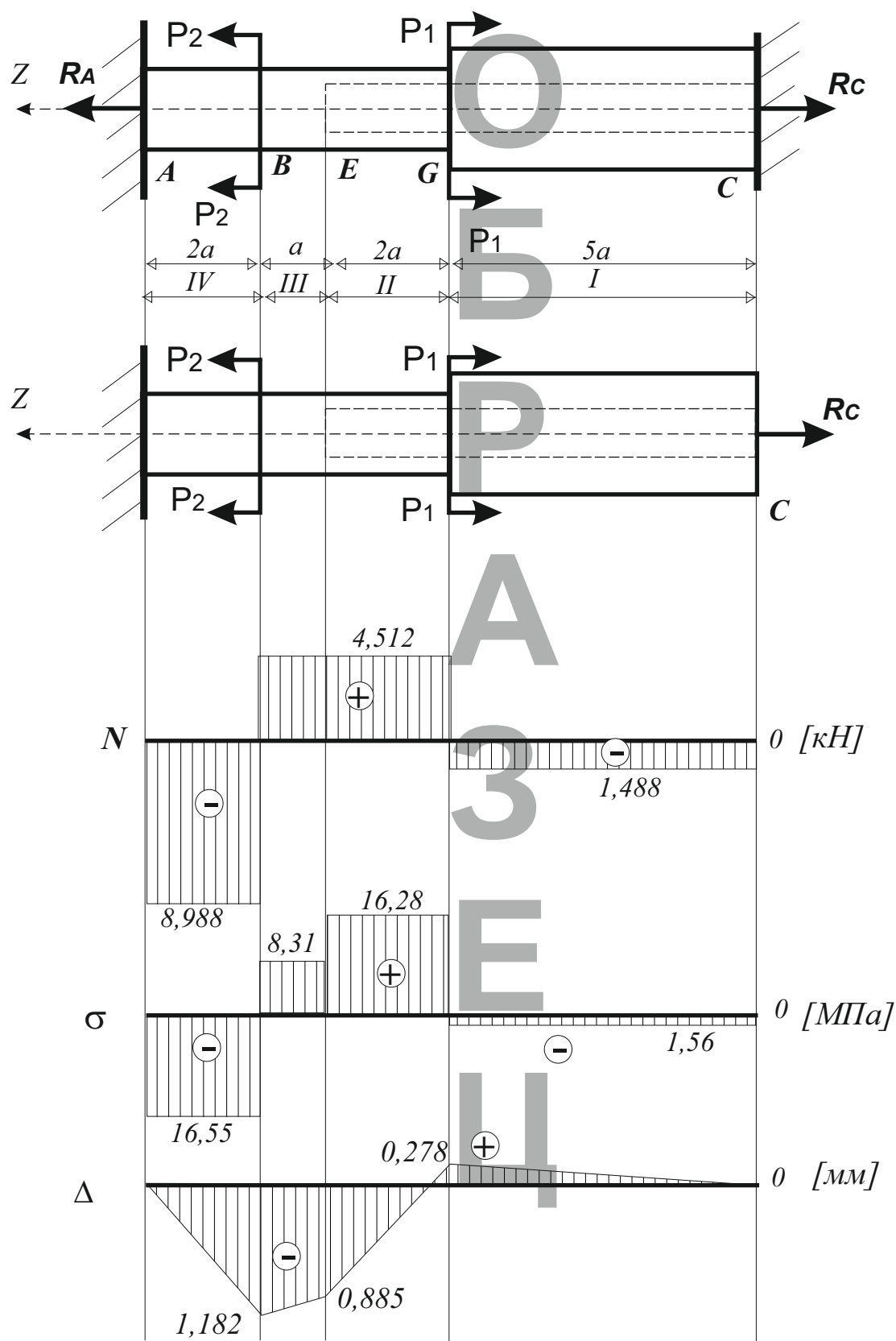
$$\sigma_{\sigma}^c = 1400 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\sigma}^p = 380 \text{ МПа},$$

Коэффициент запаса прочности определим по пределу прочности на растяжение

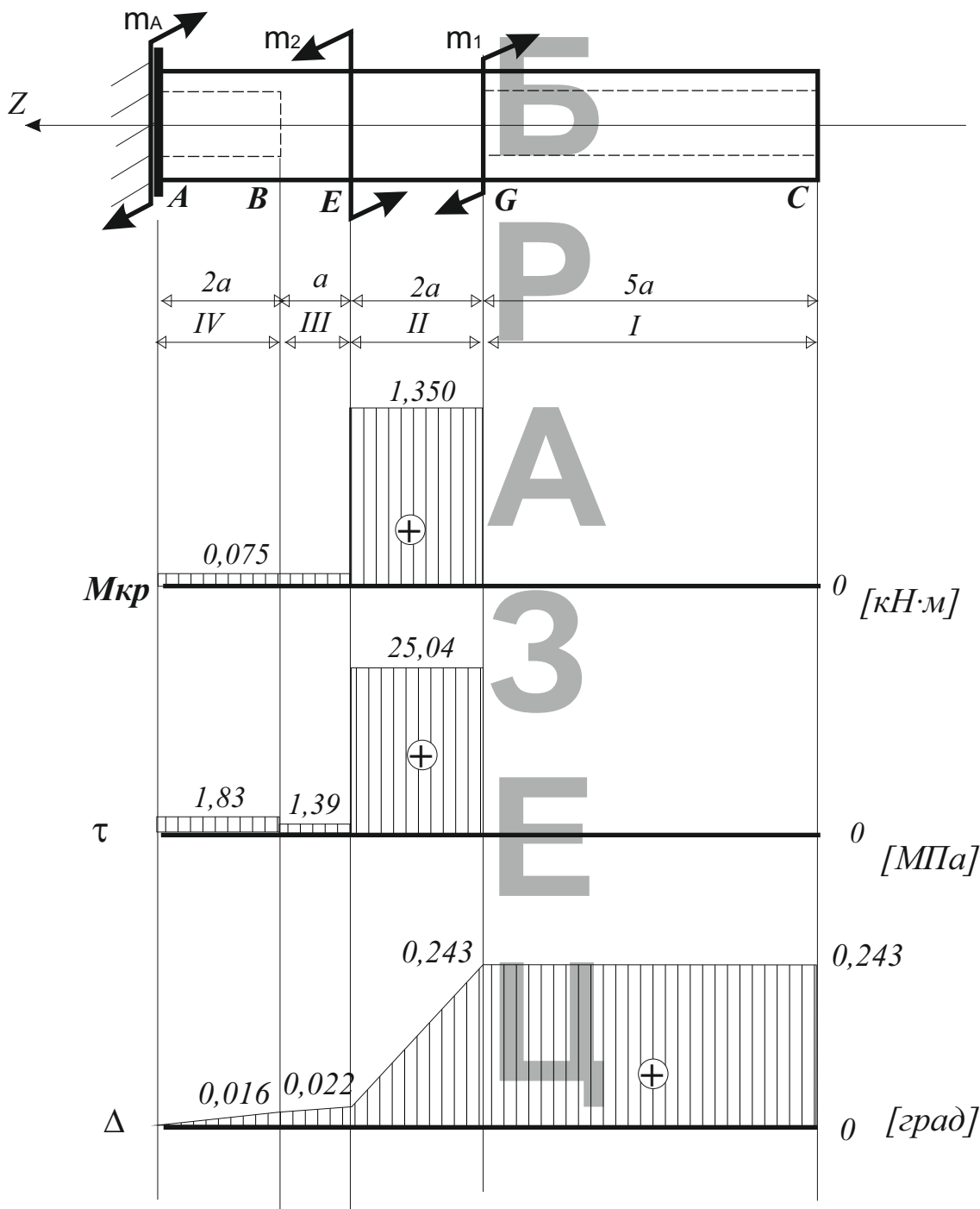
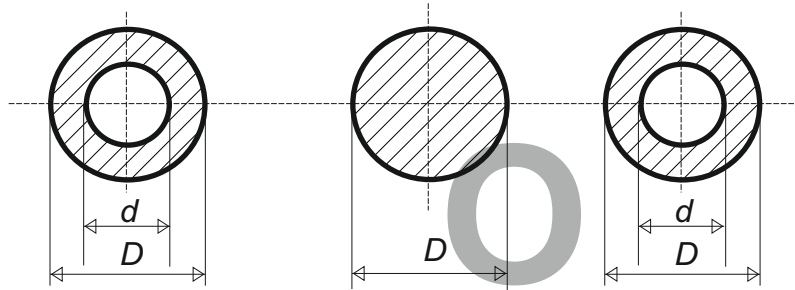
$$n = \frac{380}{106,34} = 3,57.$$

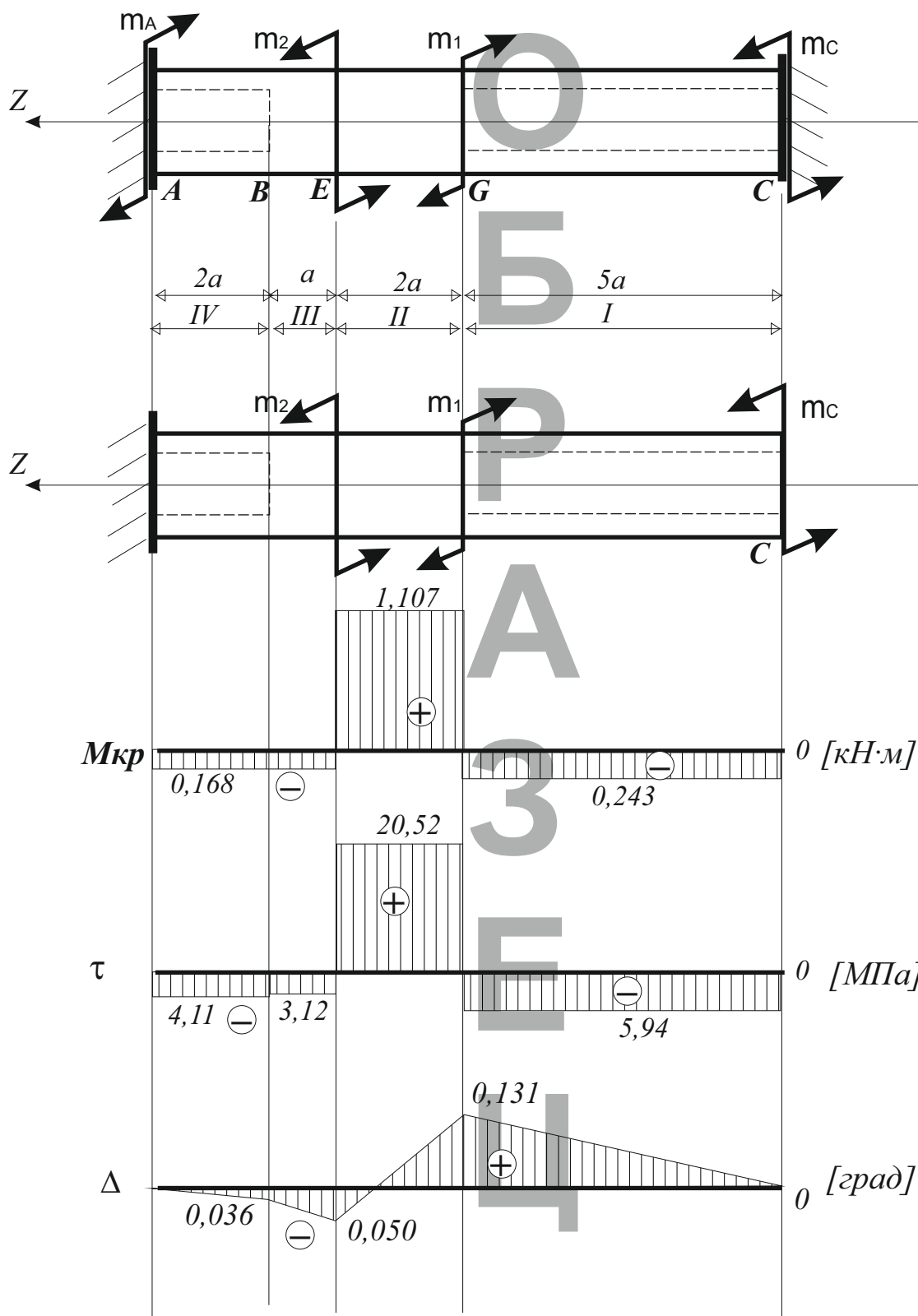
Запас прочности статически неопределимой конструкции повысился по сравнению со статически определимой.



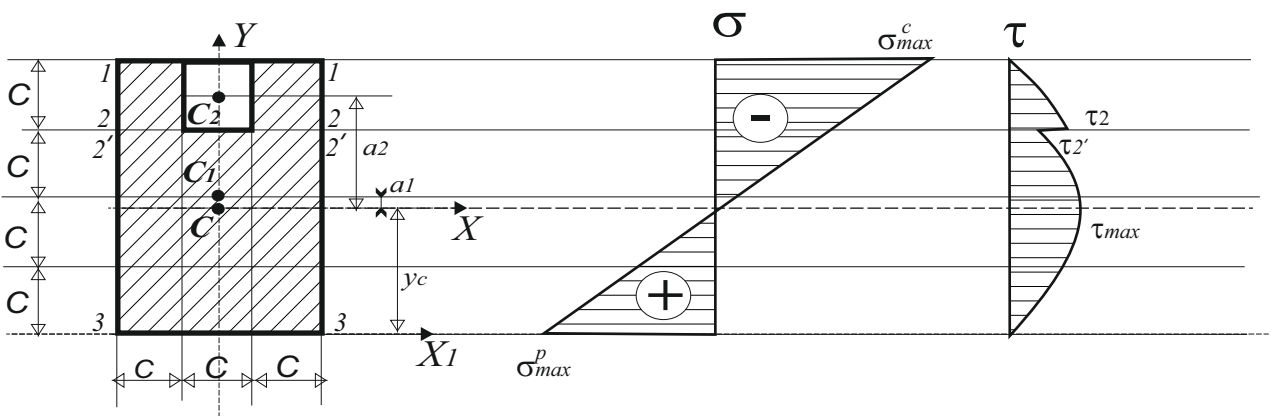


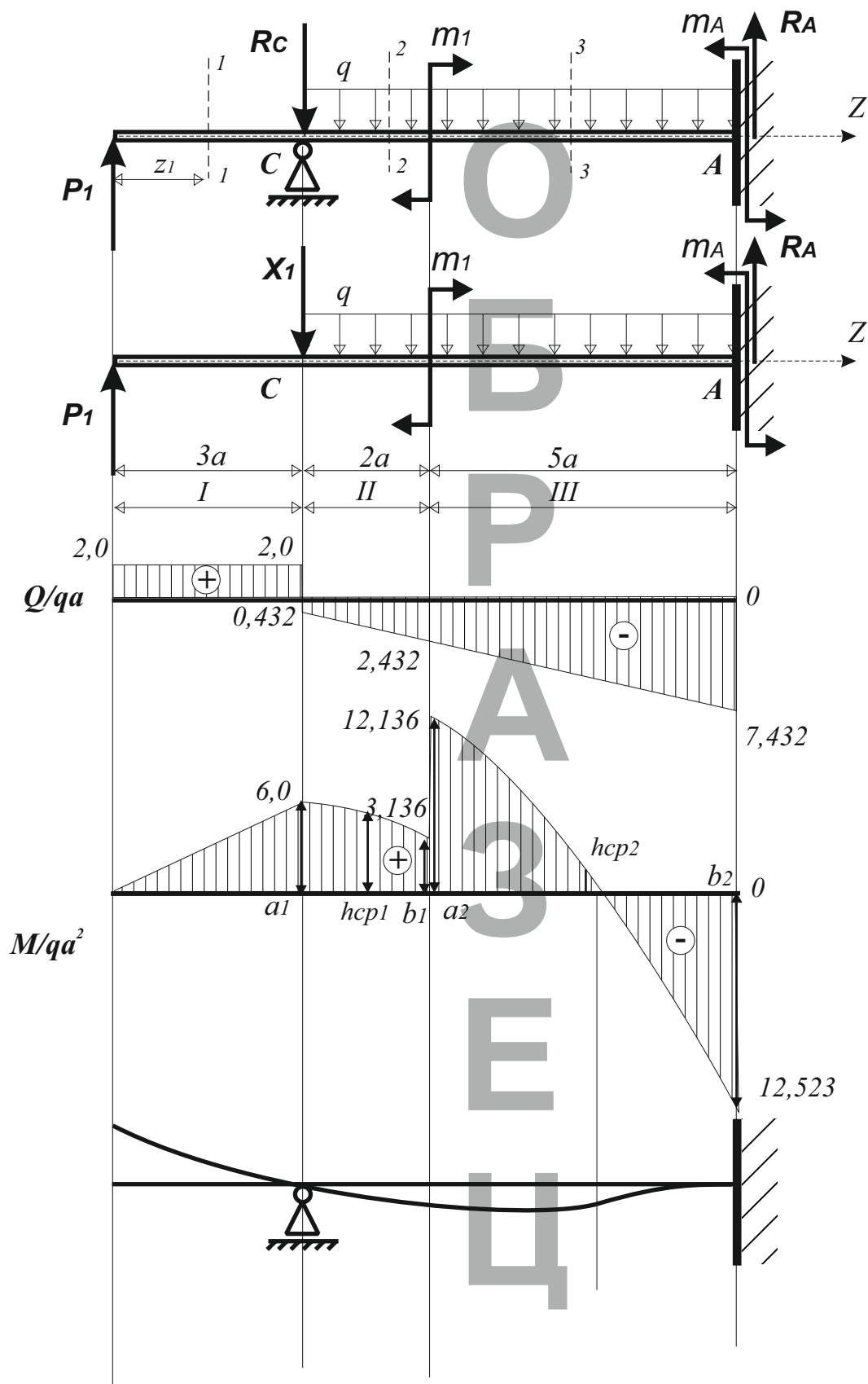
					Прочность и жесткость упругих систем при различных видах нагружения			
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		Лит	Лист	Листов
Разраб.					Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии		1	3
Проверил								
Контр.								
Утв.								





					Прочность и жесткость упругих систем при различных видах нагружения			
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		Лист	Лист	Листов
Разраб.					Расчет на прочность и жесткость при кручении		2	3
Проверил								
Контр.								
Утв.								





					Прочность и жесткость упругих систем при различных видах нагружения			
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		Лит	Лист	Листов
Разраб.					Расчет на прочность и жесткость при изгибе		3	3
Проверил								
Контр.								
Утв.								